MAI 1 - domácí úkol ze cvičení 1:

1. Dokažte, že pro všechna $a, b \in R$ platí

   (a) $|a+b| \le |a| + |b|$;

   (b) $\big||a| - |b|\big| \le |a-b|$.

A chcete-li, promyslete následující příklady - opakování „středoškolské“ matematiky jako „příprava“ na práci s funkcemi (nebo i řešení sepište, pokud byste chtěli moji kontrolu):

1. Načrtněte grafy funkcí (bez užití diferenciálního počtu)

   $f_1(x) = \big||x-1|-1\big|$, $f_2(x) = \big||x-1|^2 - 1\big|$, $f_3(x) = \exp(-|x|)$, $f_4(x) = \big|\ln|x|\big|$

   a třeba i zkuste graf funkce $f_5(x) = \exp(\frac{1}{x})$ ($\exp x = e^x$).

2. V R řešte nerovnice

   a) $|x^2 + 2x - 3| \ge |x^2 + 3x - 4|$; b) $\dfrac{\ln|x|}{4 - x^2} \ge 0$;

   c) $\sqrt{x-2} + x > 4$; d) $\sqrt{x^2 + 2x - 3} \ge \sqrt{x^2 + 3x - 4}$

3. Ukažte, že funkce $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ je rostoucí, tedy prostá na R a najděte k funkci f na R funkci inverzní.

4. Dokažte užitím matematické indukce:

   a) pro $n \in N$ platí: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$.

   nebo

   b) pro $n \in N, n \ge 2$ platí : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \ge \sqrt{n}$.